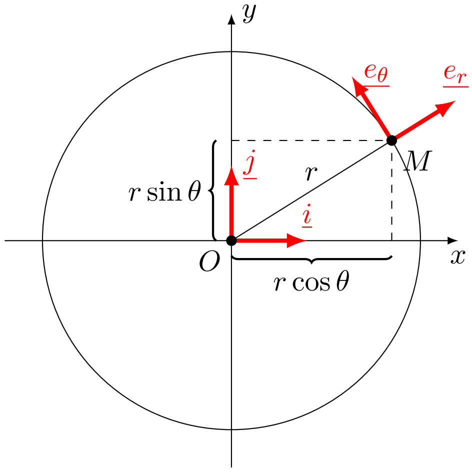
Annexe : Coordonnées curvilignes

1 Coordonnées polaires

Dans cette section les définitions de $\underline{\nabla} f$ et $\underline{\underline{\nabla v}}$ sont utilisées pour déterminer leurs composantes en coordonnées polaires.



Les coordonnées polaires sont définies par r et θ comme suit :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

où $\theta \in (0, 2\pi)$ (pour plus d'informations référez-vous à Wikipedia).

Les vecteurs unitaires $\underline{e_r}$ et $\underline{e_\theta}$ qui composent une base orthonormale peuvent être exprimés par les vecteurs unitaires cartésiens comme suit :

$$\underline{e_r} = \cos\theta\,\underline{i} + \sin\theta\,\underline{j} \tag{3}$$

$$\underline{e_\theta} = -\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j} \tag{4}$$

Ces vecteurs unitaires changent avec θ. Des équations 3 et 4 découle les formules suivantes :

$$\mathrm{d}\underline{e_r} = \underline{e_\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{5}$$

$$\mathrm{d}\underline{e_\theta} = -\underline{e_r}\,\mathrm{d}\theta \tag{6}$$

Le vecteur position du point M est $\underline{r} = r\underline{e_r}$, donc

$$\mathrm{d}\underline{r} = \underline{e_r}\,\mathrm{d}r + r\,\mathrm{d}\underline{e_r} \tag{7}$$

qui en appliquant (5) devient

$$\mathrm{d}\underline{r} = \underline{e_r}\,\mathrm{d}r + r\underline{e_\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{8}$$

1.1 Composantes de $\underline{\nabla} f$

Soit $f(r,\theta)$ un champ scalaire. D'après la définition du gradient et l'équation (8) :

$$\mathrm{d}f = \underline{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\underline{r} = \left(a_r \underline{e_r} + a_\theta \underline{e_\theta}\right) \cdot \left(\underline{e_r}\,\mathrm{d}r + r\underline{e_\theta}\,\mathrm{d}\theta\right) \tag{9}$$

où a_r et a_θ sont le composants de $\underline{\nabla} f$ respectivement dans les directions $\underline{e_r}$ et $\underline{e_\theta}$. Donc

$$\mathrm{d}f = a_r\,\mathrm{d}r + a_\theta r\,\mathrm{d}\theta \tag{10}$$

de plus, selon la définition de la différentielle nous avons :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{11}$$

Puisque les équations (10) et (11) doivent être égales :

$$a_r = \frac{\partial f}{\partial r} \quad \text{et} \quad a_\theta r = \frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{12}$$

finalement le gradient est défini comme suit :

$$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\underline{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\underline{e_\theta} \tag{13}$$

1.2 Composantes de $\underline{\underline{\nabla v}}$

1.2.1 Rappel : coordonnées cartésiennes 3D

Dans le repère cartésien 3D, le gradient d'un vecteur est

$$\underline{\underline{\nabla v}} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} \otimes \underline{e}_x + \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} \otimes \underline{e}_y + \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} \otimes \underline{e}_z \tag{14}$$

où $\otimes$ indique le produit tensoriel. En explicitant les composantes cartésiennes, on a :

$$\underline{\underline{\nabla v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_x,\underline{e}_y,\underline{e}_z)} \tag{15}$$

On en déduit directement l'expression de la divergence d'un champ vectoriel en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div} \underline{v} = \operatorname{tr}(\underline{\underline{\nabla v}}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{16}$$

1.2.2 Coordonnées polaires

Soit $\underline{v}$ une fonction vectorielle de (r,θ) dans le système de coordonnées polaires : $\underline{v} = v_r(r,\theta)\underline{e}_r + v_\theta(r,\theta)\underline{e}_\theta$. D'après la définition du gradient :

$$\mathrm{d}\underline{v} = \underline{\underline{\nabla v}} \cdot \mathrm{d}\underline{r} \tag{17}$$

avec $\mathrm{d}\underline{r}$ donné par 8. Explicitons la différentielle de $\underline{v}$ en prenant garde au fait que les vecteurs de base varient avec la position et ont donc une différentielle non nulle :

$$\mathrm{d}\underline{v} = \mathrm{d}\left(v_r\underline{e}_r + v_\theta\underline{e}_\theta\right) = \mathrm{d}v_r\underline{e}_r + v_r\mathrm{d}\underline{e}_r + \mathrm{d}v_\theta\underline{e}_\theta + v_\theta\mathrm{d}\underline{e}_\theta = (\mathrm{d}v_r - v_\theta\mathrm{d}\theta)\underline{e}_r + (\mathrm{d}v_\theta + v_r\mathrm{d}\theta)\underline{e}_\theta \tag{18}$$

en utilisant 5 et 6. En utilisant à présent la définition de la différentielle 11 pour les fonctions scalaires v_r et v_θ, on obtient :

$$\mathrm{d}\underline{v} = \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\mathrm{d}r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right)\mathrm{d}\theta\right)\underline{e}_r + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\mathrm{d}r + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right)\mathrm{d}\theta\right)\underline{e}_\theta \tag{19}$$

D'autre part, en notant $a_{rr}, a_{r\theta}, a_{\theta r}$ et $a_{\theta\theta}$ les 4 composantes de $\underline{\underline{\nabla v}}$ dans la base polaire, le membre de droite de (17) s'explicite de la façon suivante en utilisant 8 :

$$\underline{\underline{\nabla v}} \cdot \mathrm{d}\underline{r} = (a_{rr}\mathrm{d}r + r a_{r\theta}\mathrm{d}\theta)\,\underline{e}_r + (a_{\theta r}\mathrm{d}r + r a_{\theta\theta}\mathrm{d}\theta)\,\underline{e}_\theta \tag{20}$$

L'identification termes à termes de (19) et (20) conduit à :

$$a_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \tag{21}$$
$$r a_{r\theta} = \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \tag{22}$$
$$a_{\theta r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \tag{23}$$
$$r a_{\theta\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \tag{24}$$

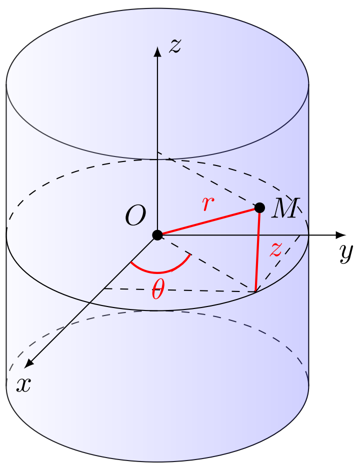
On obtient finalement l'expression du gradient d'un vecteur en coordonnées polaires :

$$\underline{\underline{\nabla v}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)} \tag{25}$$

On en déduit directement l'expression de la divergence d'un champ vectoriel en coordonnées polaires :

$$\mathrm{div}\,\underline{v} = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\nabla v}}) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) \tag{26}$$

2 Coordonnées cylindriques



Les expressions des gradients scalaire et vectoriel pour les coordonnées cylindriques peuvent être facilement déterminées par extension des gradients en coordonnées polaires. On suit pour cela la même démarche en considérant pour le cas vectoriel $\underline{v}(r,\theta,z) = v_r(r,\theta,z)\underline{e}_r + v_\theta(r,\theta,z)\underline{e}_\theta + v_z(r,\theta,z)\underline{e}_z$ et en remarquant que $\underline{r} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z$ et $\mathrm{d}\underline{e}_z = \underline{0}$ dans ce système de coordonnées. On obtient alors :

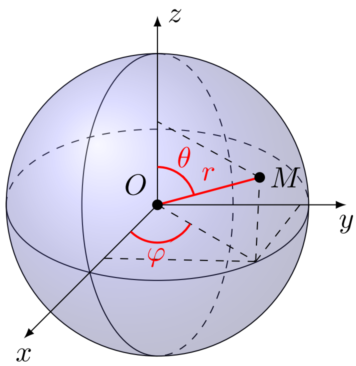
$$\underline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial r}\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{e}_z \tag{27}$$

$$\underline{\underline{\nabla v}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{(\underline{e_r}, \underline{e_\theta}, \underline{e_z})} \tag{28}$$

On en déduit directement l'expression de la divergence d'un champ vectoriel en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \underline{v} = \operatorname{tr}(\underline{\underline{\nabla v}}) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{29}$$

3 Coordonnées sphériques



Les expressions des gradients en coordonnées sphériques peuvent être déterminé de la même façon que celle utilisée auparavant en remarquant que $\underline{r} = r\underline{e_r}$ et :

$$\mathrm{d}\underline{e_r} = \mathrm{d}\theta\, \underline{e_\theta} + \sin\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \underline{e_\varphi} \tag{30}$$

$$\mathrm{d}\underline{e_\theta} = -\mathrm{d}\theta\, \underline{e_r} + \cos\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \underline{e_\varphi} \tag{31}$$

$$\mathrm{d}\underline{e_\varphi} = -\sin\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \underline{e_r} - \cos\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \underline{e_\theta} \tag{32}$$

$$\mathrm{d}\underline{r} = \mathrm{d}r\, \underline{e_r} + r\mathrm{d}\theta\, \underline{e_\theta} + r\sin\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \underline{e_\varphi} \tag{33}$$

Elles sont

$$\underline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial r}\underline{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\underline{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\underline{e_\varphi} \tag{34}$$

$$\underline{\underline{\nabla v}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi\right) \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \dfrac{v_\varphi}{\tan\theta}\right) \\ \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{v_\theta}{\tan\theta} + v_r\right) \end{bmatrix}_{(\underline{e_r}, \underline{e_\theta}, \underline{e_\varphi})} \tag{35}$$

On en déduit directement l'expression de la divergence d'un champ vectoriel en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div} \underline{v} = \operatorname{tr}(\underline{\underline{\nabla v}}) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{\tan\theta} + v_r\right) \tag{36}$$

4 Expressions de la divergence d'un tenseur d'ordre 2

Nous avons défini dans le cours l'opérateur divergence pour un tenseur du deuxième ordre $\underline{\underline{T}}$. L'obtention des expressions de la divergence de tenseurs dans les différents systèmes de coordonnées peut s'effectuer (au prix de calculs relativement lourds) en calculant l'expression du gradient de $\underline{\underline{T}}$ dans les différents systèmes de coordonnées et en calculant ensuite la trace de ce gradient (contraction selon les 2 derniers indices). On donne ici directement les résultats (on rappelle que $\operatorname{div}\underline{\underline{T}}$ est un vecteur) :

— coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div}\underline{\underline{T}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{Bmatrix}_{(\underline{e}_x,\underline{e}_y,\underline{e}_z)} \tag{37}$$

— coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div}\underline{\underline{T}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \dfrac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ \dfrac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \dfrac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} \\ \dfrac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \dfrac{T_{zr}}{r} \end{Bmatrix}_{(\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_z)} \tag{38}$$

Remarque : on obtient le cas polaire en prenant les 2 premières composantes et avec $T_{rz} = T_{\theta z} = 0$.

— coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div}\underline{\underline{T}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta}\cot\theta}{r} \\ \dfrac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{(T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi})\cot\theta + T_{r\theta} + 2T_{\theta r}}{r} \\ \dfrac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{T_{r\varphi} + 2T_{\varphi r} + (T_{\theta\varphi} + T_{\varphi\theta})\cot\theta}{r} \end{Bmatrix}_{(\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_\varphi)} \tag{39}$$

Remarque : les expressions précédentes se simplifient quelque peu dans le cas d'un tenseur symétrique $T_{ij} = T_{ji}$